Вот мы и добрались до «хэдлайнера» теормеха – его предпоследней темы, задачи на которую обожают давать на к/р и экзамене. Теормех заканчивается, ~~слава те~~ с чем я вас и поздравляю.

Для сложных гамильтонианов может оказаться, что система уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_{\text{нов}}}{\partial q_i}$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_{\text{нов}}}{\partial p_i}$$

не решается.

Тогда Гамильтон и Якоби разработали свой метод.

Идея метода Гамильтона Якоби: нужно выбрать сделать такое каноническое преобразование к переменным P и Q, чтобы H(P,Q) имел как можно более простой вид, а именно, тождественный нуль.

Заметим, что переменными такого нового гамильтониана будут интегралы движения. Ну потому что для него тоже будут выполняться уравнения Гамильтона:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H_{\text{нов}}}{\partial Q_i}$$
$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H_{\text{нов}}}{\partial P_i}$$

Но т.к. $H_{\text{нов}}$ будет тождественным нулём, то новые переменные P и Q будут заведомо константами.

Замечу (об этом же говорит Заряев), что метод Г-Я хорош для СЛОЖНЫХ гамильтонианов, где система $\begin{aligned}\dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \\ \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j},\end{aligned}$ не решается, а для простых это пушка по воробьям. Увы, у вас на теормехе будут лишь простые гамильтонианы, где Г-Я будет «пушкой по воробьям» (а иногда даже и по муравьям ☹) Например, в пособиях Пименова и Степаньяца есть решение методом Гамильтона-Якоби задачи о гармоническом осцилляторе. Об осцилляторе, который в школе решают, Карл. Теорфизики в ответ говорят, что это простая иллюстрация работы метода Г-Я. Ну как простая… её решение методом Г-Я примерно в 5 раз длиннее «нормального» решения. А данную задачу, кстати ну очень любят давать на разных к/р и экзаменах. Так что все претензии (и справедливые!) к кафедре теорфиза.

Хорошо, а как же сделать то самое преобразование, которое сведёт новый гамильтониан к нулю?

Для этого, вообще говоря, теорфизики и придумали производящую функцию. Преобразование, порождённое производящей функцией, гарантированно будет каноническим.
Поэтому запишем новый гамильтониан через производящую функцию:

$$\text{новый гамильтониан} = \text{старый гамильтониан}\, H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

В методе Г-Я традиционно полагают валентность =1 (и производящая функция первого рода).
Потребуем, чтобы новый гамильтониан был =0:

$$0 = \text{старый гамильтониан}\, H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Это и есть уравнение Гамильтона-Якоби (вполне логично в методе Г-Я видеть уравнение Г-Я). Чтобы у нас было поменьше переменных, мы выразили импульсы через координаты: $0 = \mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$, т.е. теперь у нас ДУ функции s+1 переменных (s степеней свободы – это qшки, да ещё время).

Алгоритм решения задач с Г-Я, который даёт Степаньянц:

1) для системы, описываемой с помощью некоторой функции Гамильтона, записываем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}, t\right)$$

2) из него получаем полный интеграл $F(q_i, \alpha_i, t), i = \overline{1, s}$

3) закон движения получаем из уравнений

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \beta_i \equiv \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}, \quad \alpha_i, \beta_i = \text{const}$$

А что за альфы и беты? Это обозначения P и Q такие:

Сравнивая с записью полного интеграла, попробуем отождествить $Q_i \equiv \alpha_i$.

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad -P_i = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \equiv \beta_i = \text{const}$$

Пункт 1) самый простой – записать уравнения. Пункт 3) тоже несложный – подсчитать частные производные. Основная сложность в 2) – решении ДУ. Посмотрим на примерах.

Первый пример, который разбирает Степаньянц

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

Классика – одномерное потенциальное движение. Не могу в очередной раз не упрекнуть кафедре теорфиза – баян же. Ну что поделать. Зато этот баян мы будем использовать в дальнейших задачах.

Шаг 1а: запиши уравнение Г-Я (в данном случае одно) на производящую функцию:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

Тут у нас будет проблема с тем, что у нас в уравнении Г-Я будет старый импульс, а производящая функция от него не зависит. Чтобы у нас получилось корректное уравнение в частных производных, на которое бы не наорали бы математики

, нужно избавиться от импульсов, вспомнив, что $p = \frac{\partial F}{\partial q}$. Подставим:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + U(x)$$

Итак, **Шаг 1б: от импульсов в уравнении Г-Я следует избавиться по формуле $p = \frac{\partial F}{\partial q}$**

Далее следует

Шаг 2: Нужно решить уравнение Г-Я, помня, что F - функция многих переменных, т.е. это ур-е в частных производных.

В данном случае F зависит от t, x и… а чего ещё? Вообще ещё X – новой переменной (хотя она интеграл движения, так что она не очень переменная ☺)

Важное замечание: на ММФ часто решала замена u(x,y)=X(x)*Y(y). На теормехе же лучше искать не в виде произведения, а виде суммы: $F = T(t) + X(x)$.

Подставляем такое разложение:

$$-\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\frac{dX(x)}{dx}\right)^2 + U(x)$$

Следует типичное ММФ-вское рассуждение «правая часть от t не зависит, а левая от x, поэтому обе константа». Обозначим её как E:

$$-\frac{dT(t)}{dt}=\frac{1}{2m}\left(\frac{dX(x)}{dx}\right)^2+U(x)=\mathrm{const}\equiv E$$

Тогда:

$$T(t)=-Et,\quad X(x)=\pm\int dx\sqrt{2m\left(E-U(x)\right)}$$

$$F(t,x)=-Et\pm\int dx\sqrt{2m\left(E-U(x)\right)}\text{ — полный интеграл ур. Г-Я}(\alpha_i\to E,q_i\to x)$$

Всё, нашли F, второй шаг выполнен. Отметим, что производящая функция в методе Г-Я традиционно является функцией времени, старой координаты и одной из новых координат. Причём эта новая координата всегда будет интегралом движения и поэтому её часто обозначают как E.

Шаг 3: Зная производящую функцию, нужно брать частные производные по её аргументам.

Итак, у нас производящая функция есть функция $F(x,E,t)$ - времени, старой координаты x и новой E.

Нам нужно получить вторую старую (p) и вторую новую (она тоже будет интегралом движения). Что для этого нужно сделать? Вспоминаем предыдущую методичку!

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q}\\ P=-\dfrac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q}\end{cases}$$

Ну конечно – взять частные производные по старой и новой координатам, являющимися аргументами производящей функции!

Берём:

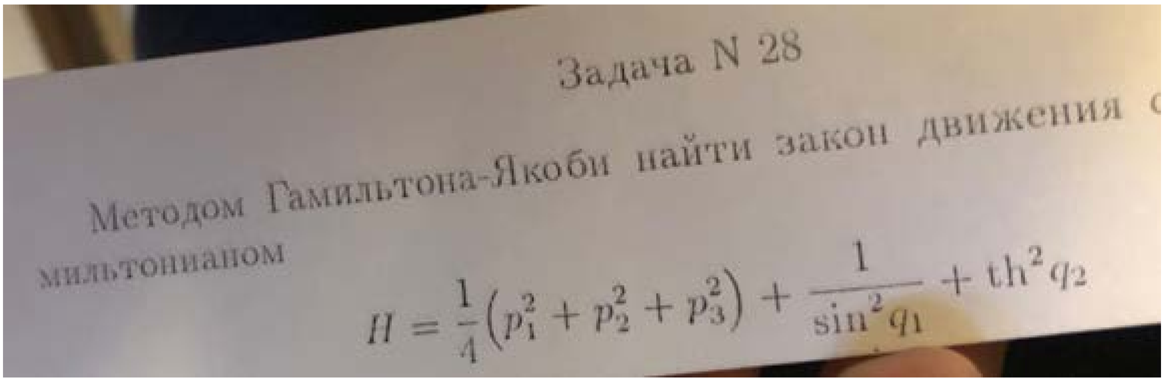
$$p=\frac{\partial F}{\partial x}=\pm\sqrt{2m\left(E-U(x)\right)}\Rightarrow\frac{p^2}{2m}=E-U(x)\Rightarrow E=\frac{p^2}{2m}+U(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial E}=-t\pm\int_{x_0}^{x}dx\frac{2m}{2\sqrt{2m\left(E-U(x)\right)}}=\mathrm{const}=-t_0\text{ — определяется из начальных условий}$$

$$\boxed{t-t_0=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}}$$

Первая строчка особо бесполезна (её единственный смысл – выразить E через старые переменные), а вот вторая – вычисление второго аргумента нового гамильтониана, т.е. второго интеграла движения (первый – E). Так что если вас спросят, какие переменные нового гамильтониана, отвечайте: энергия E и вот такое вот время $-t\pm\int_{x_0}^{x}dx\frac{2m}{2\sqrt{2m\left(E-U(x)\right)}}$. Обе будут интегралами движения: с изменением t меняется и интеграл, а вот их сумма/разность и будет константой, имеющей размерность времени.

Второй пример, который даёт на КР Смирнов (а может, и на экзамене):



Задача N 28

Методом Гамильтона-Якоби найти закон движения

мильтонианом

$$H = \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{\sin^2 q_1} + \operatorname{th}^2 q_2$$

Не могу не заметить, что уравнения Гамильтона будут в этом случае максимально простыми: все переменные разделится. Разумеется, и эта задача решилась бы без Г-Я. Но в условии просят Г-Я. Что же, «пушкой по воробьям» - то, о чём я говорил в начале.

Опять идём по нашему алгоритму:

Шаг 1а: Напиши уравнение Г-Я!

$$0 = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Шаг 2:

Его нужно решить! А для этого, как в предыдущей задачи, нужно разбить производящую функцию на части:

$$F(q_1, q_2, q_3, t) = F_1(q_1, t) + F(q_2, t) + F(q_3, t)$$

Гамильтониан в данной задаче тоже разбивается на три гамильтониана:

$$H_1 = \frac{p_1^2}{4} + \frac{1}{\sin^2 q_1}$$

$$H_2 = \frac{p_1^2}{4}$$

$$H_3 = \frac{p_1^2}{4} + th^2 q_3$$

Эврика, говорим мы! Вместо жуткого

$$0 = H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) + \frac{\partial F(q_1, q_2, q_3, t)}{\partial t}$$

мы напишем три уравнения Г-Я для каждой пары переменных:

$$0 = H_1(p_1, q_1) + \frac{\partial F_1(q_1, t)}{\partial t}$$

$$0 = H_2(p_2, q_2) + \frac{\partial F_2(q_2, t)}{\partial t}$$

$$0 = H_3(p_3, q_3) + \frac{\partial F_3(q_3, t)}{\partial t}$$

Ну и можно каждое из них решить. Давайте воспользуемся результатами предыдущей задачи!

$$H_1 = \frac{p_1^2}{4} + U(q_1), \text{где } U(q_1) = \frac{1}{\sin^2 q_1}$$

$$H_2 = \frac{p_1^2}{4} + U(q_2), \text{где } U(q_2) = 0$$

$$H_3 = \frac{p_1^2}{4} + U(q_3), \text{где } U(q_3) = th^2 q_3$$

Небольшое отличие будет лишь в том, что в гамильтониане Смирнова масса положена равной 2. Ах да, я ещё забыл **Шаг 1б: от импульсов в уравнении Г-Я следует избавиться по формуле $p = \frac{\partial F}{\partial q}$**. Сделав, получаем для каждого из трёх измерения то же, что в предыдущей задаче:

$$-\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\frac{dX(x)}{dx}\right)^2 + U(x)$$

правая часть от t не зависит, а левая от x, поэтому обе константа». Обозначим её как E:

$$-\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\frac{dX(x)}{dx}\right)^2 + U(x) = \text{const} \equiv E$$

Тогда:

$$T(t) = -Et, \quad X(x) = \pm\int dx\sqrt{2m\left(E - U(x)\right)}$$

$$F(t,x) = -Et \pm \int dx\sqrt{2m\left(E - U(x)\right)} \text{ — полный интеграл ур. Г-Я}(\alpha_i \to E, q_i \to x)$$

Вот она, цепочка производящих функций:

$$F_1(t,q_1) = -E_1 t \pm \int dx\sqrt{2m(E_1 - U_1(x))}$$

$$F_2(t,q_2) = -E_2 t \pm \int dx\sqrt{2m(E_2 - U_2(x))}$$

$$F_3(t,q_3) = -E_3 t \pm \int dx\sqrt{2m(E_3 - U_3(x))}$$

Для pro forma на экзамене рекомендую указать и полную производяшую функцию как сумму $F_1(t,q_1) + F_2(t,q_2) + F_3(t,q_3)$

$$F(q_1,q_2,q_3,t) == -E_1 t \pm \int dx\sqrt{2m(E_1 - U_1(x))} - E_2 t \pm \int dx\sqrt{2m(E_2 - U_2(x))}$$
$$= -E_3 t \pm \int dx\sqrt{2m(E_3 - U_3(x))}$$

Ой, простите. Забыл, что у Смирнова масса=2. Исправляемся:

$$F(q_1,q_2,q_3,t) == -E_1 t \pm \int dx\sqrt{4(E_1 - U_1(x))} - E_2 t \pm \int dx\sqrt{4(E_2 - U_2(x))}$$
$$= -E_3 t \pm \int dx\sqrt{4(E_3 - U_3(x))}$$

Обратите внимание, что у нас три интеграла движения - E_1, E_2, E_3. Ровно столько, сколько у нас пар переменных. А ещё три мы получим в шаге 3:

Шаг 3: взять 2 частные производных. Ой, простите, 2 частные производные были в предыдущей задаче, где было одномерное движение. Здесь будет 6 частных производных.

Читателю предлагается вычислить, исходя из системы

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} \\ P = -\dfrac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} \end{cases}$$

вот такие частные производные

$$p_1 = \frac{\partial F(q_1, E_1, t)}{\partial q_1}, p_2 = \frac{\partial F(q_2, E_2, t)}{\partial q_2}, p_3 = \frac{\partial F(q_3, E_3, t)}{\partial q_3}$$
$$P_1 = \frac{\partial F(q_1, E_1, t)}{\partial E_1}, P_2 = \frac{\partial F(q_2, E_2, t)}{\partial E_2}, P_3 = \frac{\partial F(q_3, E_3, t)}{\partial E_3}$$

Уравнения из первой строчки позволяют выразить E_1, E_2, E_3 через старые координаты $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, а во второй строчке – получить ещё 3 интеграла движения, имеющих стрёмный вид наподобие

$$-t \pm \int_{x_0}^{x} dx \frac{2m}{2\sqrt{2m\left(E - U(x)\right)}}$$

Я полагаю, двух задач вам хватит…

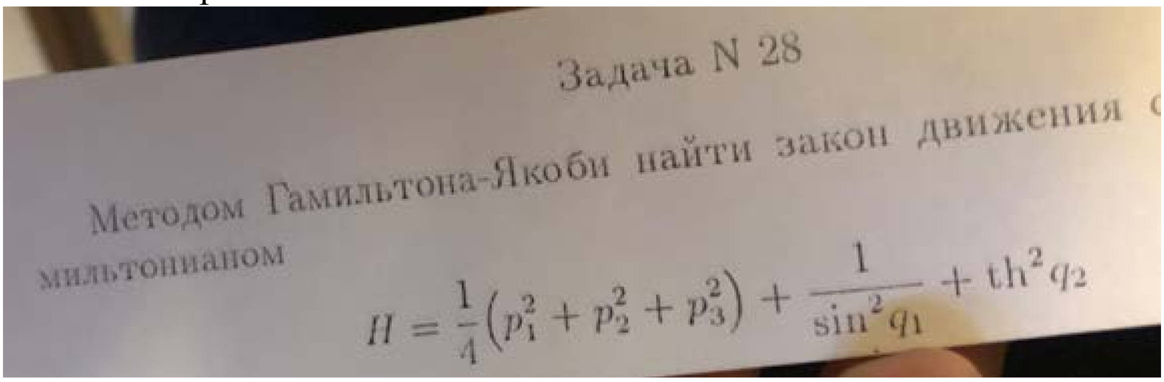
На бис хотите? Ну давайте. Решим на этот раз методом Г-Я сложную задачу, которую разбирает в МРЗ Пименов. Точнее, он решит, а я дам комментарии.

Задача 3.5.2. Система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1 - q_2} + \left(p_3^2 + \frac{1}{q_3^2}\right)(q_1 + q_2)\right).$$

Методом Гамильтона–Якоби найти закон движения системы в квадратурах.

Сразу заметим, в чём сложность этой задачи по сравнению с задачей 2, которая была от Смирнова:


Задача N 28

Методом Гамильтона-Якоби найти закон движения с...
...мильтонианом

$$H = \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{\sin^2 q_1} + \mathrm{th}^2 q_2$$

В задаче Пименова гамильтониан явно не представляется в виде
$H(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3) = H_1(p_1, q_1) + H_2(p_2, q_2) + H_3(p_3, q_3)$
и, следовательно, в таком виде не представится и производящая функция. Шаг 2 – решение диффура – обещает быть весёлым.

Ну что делать? Хотя бы шаг 1 выполним – напишем уравнение Г-Я:

$$0 = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{F}{\partial q_2}\right)^2\right)\frac{1}{q_1 - q_2} + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial q_3}\right)^2 + \frac{1}{q_3^2}\right)(q_1 + q_2)\right] = 0. \quad (3.168)$$

Полный интеграл этого уравнения будем искать методом разделения переменных, для чего представим функцию $F(q_1, q_2, q_3; t)$ в виде суммы четырех функций:

$$F(q_1, q_2, q_3, t) = T(t) + Q_1(q_1) + Q_2(q_2) + Q_3(q_3). \quad (3.169)$$

Результатом подстановки в уравнение (3.168) будет:

$$T'(t) + \frac{1}{2}\left[\left((Q_1'(q_1))^2 + (Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1 - q_2} + \right.$$
$$\left. + \left((Q_3'(q_3))^2 + \frac{1}{q_3^2}\right)(q_1 + q_2)\right] = 0. \quad (3.170)$$

Что делать дальше? Отделять переменные не все сразу, как было во второй задаче, а постепенно. Сперва уходит t:

$$-T'(t) = \frac{1}{2}\left[\left((Q_1'(q_1))^2 + (Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1 - q_2} + \right.$$
$$\left. + \left((Q_3'(q_3))^2 + \frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1 + q_2\right)\right] = \beta_1,$$

откуда временная зависимость полного интеграла

$$T(t) = -\beta_1 t + C_1,$$

где C_1 — произвольная аддитивная константа.

Как видите, Пименов то, что мы обозначаем как E_1, обозначает как β_1.

В оставшемся уравнении

$$\frac{1}{2}\left[\left((Q_1'(q_1))^2 + (Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1 - q_2} + \right.$$
$$\left. + \left((Q_3'(q_3))^2 + \frac{1}{q_3^2}\right)\left(q_1 + q_2\right)\right] = \beta_1, \qquad (3.173)$$

легко отделить переменную q_3, для чего перепишем его следующим образом:

$$(Q_3'(q_3))^2 + \frac{1}{q_3^2} =$$
$$= \left[2\beta_1 - \left((Q_1'(q_1))^2 + (Q_2'(q_2))^2\right)\frac{1}{q_1 - q_2}\right]\frac{1}{q_1 + q_2} = \beta_2. \qquad (3.174)$$

Следовательно, интегрируя первое уравнение (левая часть равна β_2),

$$Q_3(q_3) = \pm \int dq_3 \sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}} + C_2 \qquad (3.175)$$

(C_2 — произвольная постоянная).

Вот и переменная q_3 отделилась. Пименов постоянно уменьшает число аргументов производящей функции. Раньше их было 4: t, q_1, q_2, q_3, потом три: q_1, q_2, q_3, теперь осталось две - q_1 и q_2.

Во втором уравнении в (3.174) (правая часть равна β_2) произведем разделение переменных q_1 и q_2, собирая в левой части все слагаемые, зависящие от первой, в левой — от второй координаты:

$$(Q_1'(q_1))^2 - 2\beta_1 q_1 + \beta_2 q_1^2 = -(Q_2'(q_2))^2 + \beta_2 q_2^2 - 2\beta_1 q_2 = \beta_3, \qquad (3.176)$$

откуда находим функции $Q_1(q_1)$ и $Q_2(q_2)$:

$$Q_1(q_1) = \pm \int dq_1 \sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2} + C_3, \qquad (3.177)$$

$$Q_2(q_2) = \pm \int dq_2 \sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2} + C_4. \qquad (3.178)$$

В итоге, полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби будет иметь вид:

$$F(q_1, q_2, q_3, t) = -\beta_1 t \pm \int dq_1 \sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2} \pm$$
$$\pm \int dq_2 \sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2} \pm \int dq_3 \sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}} + \beta_4, \qquad (3.179)$$

где аддитивная константа β_4 представляет собой сумму ранее введенных C_1, C_2, C_3 и C_4.

Шаг 2 закончен – производящая функция найдена. Приступаем к шагу 3 – дифференцированию.

Помним, что нам предстоит две строчки дифференцирований:

$$p_1 = \frac{\partial F(q_1, E_1, t)}{\partial q_1}, p_2 = \frac{\partial F(q_2, E_2, t)}{\partial q_2}, p_3 = \frac{\partial F(q_3, E_3, t)}{\partial q_3}$$

$$P_1 = \frac{\partial F(q_1, E_1, t)}{\partial E_1}, P_2 = \frac{\partial F(q_2, E_2, t)}{\partial E_2}, P_3 = \frac{\partial F(q_3, E_3, t)}{\partial E_3}$$

И вновь нижняя строчка важнее, потому что в ней ещё три интеграла движения. Пименов долго и занудно дифференцирует:

Дифференцирование по β_1 дает квадратуру, которая выражает неявную зависимость между переменными t, q_1 и q_2:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_1} = -t \pm \int \frac{dq_1\, 2q_1}{2\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \pm$$
$$\pm \int \frac{dq_2\,(-2q_2)}{2\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} = \alpha_1, \qquad (3.180)$$

которую тут же перепишем, разбив произвольную константу α_1 на три части (одна представляет собой t_0, две другие — результат подстановки обоих интегралов на нижних пределах):

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{q_{01}}^{q_1} \frac{dq_1\, q_1}{\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \mp$$
$$\mp \int\limits_{q_{02}}^{q_2} \frac{dq_2\, q_2}{\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}}. \quad (3.181)$$

Дифференцирование по неаддитивной константе β_2 приводит к квадратуре, выражающей неявную зависимость между тремя обобщенными координатами q_1, q_2 и q_3:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_2} = \pm \int \frac{dq_1\,(-q_1^2)}{2\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \pm \int \frac{dq_2\, q_2^2}{2\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} \pm$$
$$\pm \int \frac{dq_3}{2\sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}}} = \alpha_2, \quad (3.182)$$

которую перепишем в виде, учитывающем начальные условия:

$$\pm \int\limits_{q_{01}}^{q_1} \frac{dq_1\, q_1^2}{\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} = \pm \int\limits_{q_{02}}^{q_2} \frac{dq_2\, q_2^2}{\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} \pm$$
$$\pm \int\limits_{q_{03}}^{q_3} \frac{dq_3}{\sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}}}. \quad (3.183)$$

Наконец, дифференцирование по неаддитивной константе β_3 приводит к квадратуре, устанавливающей неявную зависимость между обобщенными координатами q_1 и q_2:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_3} = \pm \int \frac{dq_1}{2\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} \pm \int \frac{dq_2(-1)}{2\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}} = \alpha_3. \quad (3.184)$$

Разбивая произвольную константу α_3 на две части, представляющие подстановки интегралов на нижних пределах, запишем ее в форме:

$$\pm \int\limits_{q_{01}}^{q_1} \frac{dq_1}{\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}} = \pm \int\limits_{q_{02}}^{q_2} \frac{dq_2}{\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}}. \quad (3.185)$$

Соотношения (3.181), (3.183) и (3.185) устанавливают закон движения системы в квадратурах.

Но переживайте, частные производные в первой строчке Пименов тоже подсчитал. Ведь для закона движения нужно узнать, чему равны $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (E_1, E_2, E_3 в наших обозначениях). Для этого и нужна первая строчка:

$$p_1 = \frac{\partial F(q_1, E_1, t)}{\partial q_1}, p_2 = \frac{\partial F(q_2, E_2, t)}{\partial q_2}, p_3 = \frac{\partial F(q_3, E_3, t)}{\partial q_3}$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = \pm\sqrt{\beta_3 + 2\beta_1 q_1 - \beta_2 q_1^2}, \tag{3.186}$$

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} = \pm\sqrt{-\beta_3 - 2\beta_1 q_2 + \beta_2 q_2^2}, \tag{3.187}$$

$$p_3 = \frac{\partial F}{\partial q_3} = \pm\sqrt{\beta_2 - \frac{1}{q_3^2}}, \tag{3.188}$$

откуда после нехитрых преобразований находим выражения для неаддитивных констант:

$$\beta_1 = \frac{\beta_2}{2}\left(q_1 + q_2\right) + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\left(q_1 + q_2\right)}, \tag{3.189}$$

$$\beta_2 = p_3^2 + \frac{1}{q_3^2}, \tag{3.190}$$

$$\beta_3 = -\beta_1 q_1 q_2 + \frac{p_1^2 q_2 + p_2^2 q_1}{q_2 - q_1}. \tag{3.191}$$

Фуф! Теперь точно всё.